Ειδική Περίπτωση: Επιφάνειες που είναι γραφήματα πραγματικών συναρτήσεων 2 μεταβλητών. Έστω $f: M \to \mathbb{R}$ C^1. Τότε η $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ με $(x,y) \in K \subset M$, είναι μια παραμετρική επιφάνεια με εφαπτόμενα διανύσματα $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \end{pmatrix}$ και $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$ του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας στο σημείο της $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$. (τα οποία και δημιουργούν το εφαπτόμενο επίπεδο) με κάθετο διάνυσμα:

$$N(\varphi(x,y)) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\right] \times \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \text{με } e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$$

$$= -e_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - e_2 \frac{\partial f}{\partial y} + e_3 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, 0, 0\right) + \left(0, -\frac{\partial f}{\partial y}, 0\right) + (0,0,1) =$$

$$= \Big(\underbrace{-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}}_{-\nabla f(x,y)}, 1\Big)$$

όπου το $N(\varphi(x,y))$ το κάθετο διάνυσμα στο σημείο $\varphi(x,y)$ επί επιφάνειας μας:

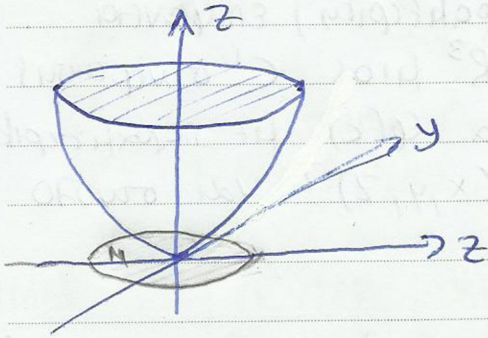
και εαν $\|N(\varphi(x,y))\| \neq 0$, $\forall (x,y) \in K$
τοτε η επιφάνεια είναι κανονική και το

$$n(\varphi(x,y)) = \frac{N(\varphi(x,y))}{\|N(\varphi(x,y))\|}$$

, λέγεται μοναδιαίο κάθετο διανυσμα της επιφάνειας στο σημείο $\varphi(x,y)$.

Παράδειγμα:

Για τη σωάρτηση $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$



$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; z = f(x,y)\} =$$
$$= \{ (x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = S$$
$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{pmatrix}, \; (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

με $\varphi(\mathbb{R}^2) = S$

καθώς $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} \end{array}\right\} N(\varphi(x,y)) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{vmatrix} =$$

$$= (-x, -y, 1)$$

οπου,

$$\|N(\varphi(x,y))\| = \sqrt{x^2+y^2+1} =$$
$$= \sqrt{\|(x,y)\|^2 + 1}$$

(παρατήρηση: για $\|(x,y)\| \to \infty$ τοτε το $(-x,-y,1)$ "παίζει" στους άξονες x και y ($\forall x, y \in \mathbb{R}$) με z σταθερο και ισο με 1).

Τέλος, $n(\varphi(x,y)) = \frac{N(\varphi(x,y))}{\|N(\varphi(x,y))\|} = \frac{(-x,-y,1)}{\sqrt{\|(x,y)\|^2+1}}$ το ορθοκανονικό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

$$n(\varphi(x,y)) = \frac{(-\nabla f(x,y), 1)}{\sqrt{\|\nabla f(x,y)\|^2 + 1}}$$